

KURZUSINFORMÁCIÓ

ANALÍZIS I, PMB1105

2013

Tantárgy neve: Analízis I

Tantárgy kódja: PMB1105

Kreditpont: 4

Heti kontakt óraszám (elm.+gyak.): 2+2

Előfeltétel: nincs

Félévi követelmény: kollokvium

Előadás

Halmazok Alapvető fogalmak, halmazműveleti tulajdonságok, halmazrendszerek

Relációk Rendezett pár, Descartes-szorzat, reláció értelmezési tartománya és értékkészlete, összetett és inverz reláció

Függvények Függvény fogalma, halmazok képe és ősképe, összetett és inverz függvény, valós függvények tulajdonságai, elemi függvények

Valós számok A valós számok axiómarendszere, egyenlőtlenségek, halmazok számossága, a valós számok metrikus tulajdonságai (környezet, torlódási pont, nyílt halmazok)

Számsorozatok Monotonitás, korlátosság, konvergencia, részsorozatok, tágabb értelemben vett konvergencia, Cauchy sorozat, nevezetes sorozatok, az e szám fogalma, határérték és műveletek, Rendőr-elv, további érdekes határértékek

Végtelen sorok A sor fogalma, mértani sorok, további kiszámítható sorok, abszolút és feltételesen konvergens sorok, sorok átrendezhetősége, konvergencia kritériumok, hatványsorok konvergencia tartománya

Függvények folytonossága Átviteli elv, elemi függvények folytonossága, szakadási helyek, függvények határértéke, határérték a végtelenben, egyenletes folytonosság, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai

Gyakorlat

A gyakorlaton az előadáshoz kapcsolódó feladatok megoldására kerül sor, különös tekintettel a következő típusokra:

- Halmazok elemeinek meghatározása,
- Halmazegyenlőség bizonyítása,
- Relációk, ill. értelmezési tartományának, értékkészletének és inverzének meghatározása,
- Összetett relációk meghatározása,
- Inverzfüggvények meghatározása,
- Halmazok függvény szerinti képe és ősképe,
- Függvények elemi ábrázolása, és tulajdonságainak megadása
- Egyenlőtlenségek megoldása,
- Sorozatok tulajdonságainak vizsgálata,
- Határértékszámítás,
- Mértani sorok kiszámítása, egyéb sorok összege,
- Konvergencia kritériumok használata,
- Hatványsorok konvergencia tartományának keresése,
- Függvény határértékének keresése pontban és a végtelenben.

Számonkérés, értékelés

A teljes évfolyam egy időben két zárthelyi dolgozatot ír a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből. Ezekből 20 – 20 pont szerezhető be. A zárthelyi dolgozatok megírására előadási időpontokon kerül sor, az első a szorgalmi időszak közepén, a második a szorgalmi időszak végén. A pontos dátumokat a gyakorlatvezetők vagy a kurzus előadója hirdeti ki legalább két héttel a dolgozatírás előtt. Lehetőség van gyakorlaton további 10 pont megszerzésére, ennek módja a gyakorlatvezetők kompetenciája. Szorgalmi időszakban tehát legfeljebb 50 pontot lehet elérni. A vizsgára bocsátás feltétele ebből 20 pont megszerzése. Tehát, az a hallgató, aki a két zárthelyi dolgozathoz és a gyakorlaton szerzett plusz pontokból összesen nem éri el a 20 pontot, elégtelenül kap és nem mehet vizsgázni.

Vizsgán további 50 pontot lehet elérni. A vizsgaidőpontokat a kurzus előadója hirdeti ki a Neptun tanulmányi rendszeren keresztül és csak azok a hallgatók vizsgázhatnak, akik teljesítették a vizsgára bocsátás feltételét és feliratkoztak az adott időpontra. A gyakorlaton és a vizsgán szerzett pontok összegéből jön össze a félév eredménye a következő táblázat szerint

0 – 44	→ elégtelen
45 – 54	→ elégséges
55 – 69	→ közepes
70 – 84	→ jó
85 – 100	→ jeles

Elégtelen vizsgát még kétszer lehet megismételni, ekkor a gyakorlaton szerzett pontok száma nem változik.

A számonkérések szerkezete

Egy 20 pontos zárthelyi dolgozat 5 különálló feladatból áll a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből.

Az 50 pontos vizsga szerkezete a következő

1. 5 igaz-hamis állításból álló teszt (10 pont)
2. 4 definíció vagy tétel kimondása (20 pont)
3. 3 feladat (20 pont)

Olyan definíciót vagy tételt kell tudni kimondani, melyek az előadásokon hangzott el. Hasonlóan, a feladatok is a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből kerülhetnek ki.

Rendelkezésre álló segédanyagok

- [1] Toledo Rodolfo – Rozgonyi Tibor, *Analízis I*, Főiskolai jegyzet, Nyíregyháza, 2011.

Név: _____
 Neptunkód: _____
 Gyakorlatvezető: _____

1. A halmazműveleti tulajdonságok felhasználásával igazolja, hogy

4 pont

$$(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$$

2. Legyen

3 pont

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 5\},$$

$$B = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Határozzuk meg az alábbi A, B halmazpáron értelmezett ϱ relációk értelmezési tartományát, értékészletét és inverzét, ha $a\varrho b$ akkor is csak akkor, ha $b^2 < a$.

3. Legyen $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = [-1, 3[$, továbbá

4 pont

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = |x - 1| - 1,$$

Adjuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképet!

4. Legyen $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, valamint ϱ és σ az A halmazon értelmezett reláció úgy, hogy

3 pont

$$\varrho := \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$\sigma := \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Adjuk meg a $\sigma^{-1} \circ \varrho$ reláció elemeit!

5. Ábrázolja a következő függvényt!

6 pont

$$f(x) = |2x + 3| - |x - 1|, \quad (x \in \mathbf{R})$$

Az ábra alapján írja le az f függvény tulajdonságait, illetve oldja meg a következő egyenlőtlenséget

$$|2x + 3| - |x - 1| < 2$$

Analízis I

PTI II MINTA

Név: _____
Neptunkód: _____
Gyakorlatvezető: _____

1. Vizsgáljuk meg monotonitását, korlátosságát és konvergencia szempontjából a következő sorozatot! Ha konvergens számítsuk ki $\varepsilon = 10^{-3}$ -hez tartozó küszöbindexet!

4 pont

$$a_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$$

2. Határozzuk meg a következő határértékét!

4 pont

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n^2 - n}}{n^2 + 2}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 1}{n - 3} \right)^{2n - 5}.$$

3. Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

4 pont

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n + 1}{n + 4}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

4. Adjuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

4 pont

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (x - 2)^n$$

5. Határozzuk meg a következő határértékét!

4 pont

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

Analízis I vizsga

PTI MINTA

Név: _____

Neptunkód: _____

1. Állapítsa meg, hogy a következő állítások közül melyek igazak és melyek hamisak! 10 pont

- Legyen $A = \{1, \{2\}\}$. Ekkor $1 \in A$ és $2 \in A$.
- Az egész számok és a racionális számok számossága megegyezik.
- Minden korlátos számsorozatnak van határértéke.
- Ha egy sor általános tagja tart nullához, akkor a sor konvergens.
- Minden harmadfokú polinomnak van zérushelye.

2. Adja meg a következő tételeket és fogalmakat! 20 pont

- a függvény fogalma,
- a sorozat határértékének fogalma,
- a Rendőr-elv.
- a Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra.

3. Legyen $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, valamint ϱ és σ az A halmazon értelmezett reláció úgy, hogy 5 pont

$$\begin{aligned}\varrho &:= \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (4, 5)\} \\ \sigma &:= \{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (5, 4)\}.\end{aligned}$$

Adjuk meg a $\varrho^2 \circ \sigma$ reláció elemeit!

4. Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából a következő sorozatot! Ha konvergens, számítsuk ki $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz tartozó küszöbindeket! 6 pont

$$a_n := \frac{n-1}{2n+3}$$

5. Határozza meg a következő határértékeket! 9 pont

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + 2n}{2 + \sqrt{n^2 + 1}}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n-3}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}.$$