

Vályi Sándor¹

ELSŐRENDŰ LOGIKA ÉS GENERATÍV MESTERSÉGES INTELLIGENCIA

FIRST-ORDER LOGIC AND GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE

ÖSSZEFOGLALÓ

Az elsőrendű logika a formális ismeret-reprezentációs és következtetési rendszerek történetileg legfontosabb és legbefolyásosabb tagja. Ma is az első helyen szerepel a legismertebb mesterséges intelligencia tankönyv ismeret-reprezentációs eszközei között. Természetesen az elsőrendű logika érvelési formalizmusa és az automatikus következménybizonyító algoritmusai nagy hatást gyakoroltak a mai generatív mesterséges intelligencia-kutatások menetére. Jelen írásban összehasonlítjuk a 2023-as ChatGPT-3.5 és a 2025-ben (november elején) általánosan elérhető ChatGPT-5 verzió néhány, az elsőrendű logikával kapcsolatos képességét, mintegy vizsgáztatás alá vetjük, mint egy elsőéves programtervező informatikus vagy matematikus hallgatót. Megállapítjuk, hogy az elsőrendű logikával kapcsolatos szintaktikai ismeretei rendben voltak már 2023-ban is. A formális levezetések keresésével kapcsolatos képessége is fejlett volt már akkor. Megállapítottuk, hogy a természetes nyelven megfogalmazott következtetésekben az elmúlt két év alatt nagyon sokat fejlődött, a 'reasoning' fontos szerepet kapott a ChatGPT újabb modelljeinek fejlesztéseiben, tulajdonképpen a fejlesztések egyik fő irányát jelenti.

Kulcsszavak: mesterséges intelligencia, generatív MI, elsőrendű logika, formális következtetés, természetes nyelvi következtetés

ABSTRACT

First-order logic is historically the most important and influential member of formal knowledge representation and inference systems. It still ranks first among the knowledge representation tools of the most well-known artificial intelligence textbook. Of course, the reasoning formalism of first-order logic and its automatic deduction algorithms have had a great impact on the course of today's generative artificial intelligence research. In this paper, we compare some of the first-order logic-related capabilities of the 2023 ChatGPT-3.5 and the ChatGPT-5 version, which will be generally available in 2025 (early November), and put them to the test, as if they were a first-year computer science or mathematics student. We conclude that their syntactic knowledge of first-order logic was already ok in 2023. Their ability to search for formal derivations was also developed well at that time. We have found that inferences formulated in natural language have improved a lot over the past two years. 'Reasoning' has played an important role in the development of the newer ChatGPT models, in fact it represents one of the main directions of development..

Keywords: artificial intelligence, generativ AI, first-order logic, formal reasoning, reasoning in natural language

¹ University of Nyíregyháza, Institute of Mathematics and Computer Science

email: valyi.sandor@nye.hu

1. Bevezetés

Az ismeret-reprezentáció és az ismeretbázison működő következtető algoritmusok használata a mesterséges intelligencia fejlődésének már korai időszakában belépett a hasznos eszközök közé. Már a 70-es évektől szakértői rendszereket készítettek. Abban a korban csak néhány MB-os tudásbázisokat tudtak létrehozni, a tárolási és feldolgozási korlátok miatt. Ezek működési területe és hatékonysága nyilván korlátozott volt, a korlát gyakran nem lépte túl a használhatóság minimális igényeit. [RN2022] Azóta a modellek fejlődése, a betanításra használt információmennyiség é a számítási és tárolási kapacitás fejlődése lehetővé tette, hogy mára százmilliárdos paraméterszámú neuronhálókat hoznak létre, az interneten és könyvtárakban fellelhető szinte összes adatból tanulva, amik képessége sok szempontból eléri vagy meghaladja az emberét, különösen az átlagemberét.

Egyáltalán nem csak a lexikális ismeretek mennyisége nőtt, hanem a feldolgozás minősége és mélysége is. Hiába mondjuk, hogy 'csupán' annyit csinál a generatív MI, hogy a a társalgás múltjához legjobban illeszkedő minták legjobban illeszkedő folytatását találja meg. Ennyi tulajdonság, a rendelkezésre álló tanítási minták emberi ismereteket szinte átfogó mennyiségével párosítva, elég ahhoz, hogy mára nagyon sok problémahelyzetben megfelelő problémamegoldó választ kapjunk a generatív MI-től.

Az OpenAI chatGPT-3 2022-es kibocsátása után több versenytárs is azzal jött elő a piacra, hogy az ő modelljeik érvelési ('reasoning') kapacitásokkal bírnak. Erre már az OpenAI is bejelentette 2025 áprilisában az o3 és o4-mini modelleket, amik a válaszadás előtt kicsit megállnak és még következtetéseket próbálnak csinálni, azokat kiértékelni. Ezek a modellek több időt töltenek a válaszok megbízhatóságának csiszolásával. [ZEFF2025]

A többlépéses, egymásba láncolt érveléskeresés, amit a tanult minták alapján a neuronhálózat végre tud hajtani, elébb-utóbb eléri vagy el fogja érni azt a mértéket, amibe már a szokásos ember léptékkal áttekinthető érvelések, akár matematikai-logikai jellegűek is, teljesen beleesnek. [LIU2023] [WAN2024] [PATEL2024] Ennek fejlődését próbáltuk meg felderíteni, olyan módon, hogy 2023-ban a chatGPT 3.5 verzióját és a 2025 novemberében rendelkezésünkre álló chatGPT 5-ös verziót teszteltük olyan kérdésekkel, amelyek egy, a Nyíregyházi Egyetemen előforduló 'A matematika alapjai' (matematikus/matematikatanár szak) vagy 'Logika a számítástudományban' (programtervező informatikus) c. tantárgyak vizsgáztatásába beleillenek. [VS2023] [VS2025]

A 2. fejezetben a lexikális ismeretek "számonkérését" végezzük el, a 3.-ban a szintaktikai ismereteket tesztelgetjük. A 4. fejezetben a formális következtetésekbe kérdezzük bele, az 5.-ben a természetes nyelven megfogalmazott következtetési feladatokat vizsgáljuk meg. A 6. fejezetben némi tanulságot vonunk le.

Talán annyit a tanulságból előre elárulhatunk, hogy a 2023-as jó(4) értékelésből 2025-re jeles(5) lett, a generatív MI elérte a Nyíregyházi Egyetem szakos hallgatóitól elvárt szintet.² Itt tartunk most.

² Bár szövegkülső-szépség szempontjából kritizálható a most következő tesztelés-leírás, de szerettük volna elkülöníteni az AI által generált válaszokat a magunk szövegétől. Amikor az MI által generált formális elvezetést idézzük, akkor egyenesen képként idézzük meg, a célból, hogy a levezetés szerkezete, egymásba ágyazottsága jobban érzékelhető legyen.

2. Lexikális ismeretek az elsőrendű logikáról, a matematika alapjaiból

Ebben a kísérletben az elsőrendű logikával kapcsolatos lexikális ismeretekből "vizsgáztattuk" a ChatGPT 3.5-öt, még 2023-ban. Például megkérdeztük, melyik a minimális axiómarendszer a mindennapi matematika számára, és szépen megválaszolta.

VS(a szerző a továbbiakban): "Hi! What is the minimal axiom system that is enough to describe everyday mathematics?"

AI: "The minimal axiom system that is enough to describe everyday mathematics is generally considered to be ZFC, which stands for Zermelo-Fraenkel set theory with the Axiom of Choice. This system includes axioms that describe the basic properties of sets, as well as the Axiom of Choice, which allows for the construction of certain sets. ZFC is a widely accepted foundation for mathematics and is used as the basis for most mathematical research. "

VS: "What are the axioms of ZF? ". The answer was a right enumeration of the axioms.

A generatív MI a betanítás során nyilván hozzájutott a matematikai irodalom alapvető könyveihez, így ezekre a kérdésekre tökéletes válaszokat adott. A formális szintaxis fogalmai 2023-ban még nem teljesen voltak meg, korrekcióra való felszólítással együtt viszont már meg tudta válaszolni a szintaktikai jellegű kérdést.

VS: " $\forall x x \in x$, is it a formula in the signature of ZF axiom system?"

AI: "No, the formula $\forall x x \in x$ is not valid in the signature of the Zermelo-Fraenkel set theory (ZF) axiom system. This formula asserts that every set is a member of itself, which is not true for all sets. "...

A korrekciónál csak fel kellett hívni a figyelmet a tévedésre.

VS: "In second last question, I did not ask you to determine that formula $\forall x x \in x$ is valid in ZF but only to syntactic correctness. So can you correct your answer?"

AI: "Apologies for the confusion in my previous response. Yes, the formula $\forall x x \in x$ is syntactically correct within the signature of Zermelo-Fraenkel set theory (ZF). It is a valid formula based on the language of set theory, involving the universal quantifier $\forall$, the variable symbol x , the membership symbol $\in$, and the variable x used as both an element and as the variable of quantification. However, while it is syntactically correct, it is not a valid formula in terms of set theory's intended meaning."

Nem csak definíciókat, hanem a matematika alapjait illető állításokra vonatkozó kérdéseket is jól megválaszolt, pl. ezeket. A válaszokat nem idézem itt be.

VS: "Can we conclude Zorn's lemma from ZFC? If yes, what is a proof for it? "

VS: "Can we prove Zorn's lemma without the Axiom of Choice, in pure ZF?"

VS: "Is the axiom system ZF consistent?"

De azért voltak tévedései, olyan kérdésekben, amik az irodalomban nem gyakran vannak explicit megfogalmazva:

VS: "Can the consistency of Peano arithmetics proved within ZF?"

Ez arra kérdésre hasonlíthatott a mintaillesztés során, hogy "Can the consistency of ZF proved within ZF?", így először ilyen választ adott:

AI: "No, the consistency of Peano arithmetic (PA) cannot be proven within Zermelo-Fraenkel set theory (ZF) itself. This statement is a consequence of Gödel's Second Incompleteness Theorem, which states that no formal system, which includes Peano arithmetic and is capable of expressing basic properties of natural numbers, can prove its own consistency, provided it is consistent. In the case of ZF, it is a set theory that encompasses Peano arithmetic, so ZF cannot prove the consistency of PA. The incompleteness theorems highlight the limitations of formal mathematical systems, showing that there are true mathematical statements that cannot be proven within those systems. The consistency of PA is one such statement that, while widely believed to be true, cannot be proven within PA itself or within any formal system that is consistent and capable of expressing the basic properties of natural numbers."

VS: "Think your last answer over, pls!"

AI: "I apologize for any confusion. You are correct, and I misspoke in my previous response. You can indeed prove the **consistency** of Peano arithmetic (PA) within Zermelo-Fraenkel set theory (ZF) or any stronger system that includes ZF. In mathematical practice, mathematicians typically use ZF or stronger systems to establish the consistency of foundational theories like PA, precisely because ZF is believed to be a consistent system. The Gödel's Second Incompleteness Theorem states that a formal system cannot prove its own consistency, but it does not prevent proving the consistency of a weaker system like PA from a stronger system like ZF. So, yes, you can prove the consistency of Peano arithmetic within ZF or other suitable set theories that are capable of expressing and reasoning about arithmetic. Thank you for pointing out the error, and I appreciate your patience."

2023-ban az egyetemünkön a matematika alapjai kurzuson ezt a részt, az elméleti kérdéskört jó(4) szer eredménnyel értékeltük volna, mivel a szintaktikai kérdést félreértette, de utána korrigált.

2025-ben viszont már jeles(5)-re kell értékelnünk ezen kérdéskörön vett kérdésekre adott válaszait. Az utolsó idézett kérdésre adott 2025-ös válasza már perfekt.

AI: "In fact, ZF can prove the consistency of PA, assuming ZF itself is consistent. Here's the landscape:
By Gödel's second incompleteness theorem, PA cannot prove its own consistency, nor can any theory prove the consistency of a stronger theory (assuming that theory is consistent).
But a *strictly stronger* theory can often prove the consistency of a weaker one. ZF is vastly stronger than PA—it can formalize PA inside it, verify that each axiom of PA is true in the von Neumann natural numbers, and check that no PA-proof of contradiction exists.
So within ZF we can build a model of PA (typically the natural numbers as sets) and then show: "There is no PA-proof of $0 = 1$. That statement is exactly the formal expression of $\text{Con}(\text{PA})$. If ZF is consistent, this argument goes through smoothly. Of course, ZF cannot prove its *own* consistency, but it has no such limitation regarding PA. In short: $\text{ZF} \rightarrow \text{Con}(\text{PA})$, but not $\text{ZF} \rightarrow \text{Con}(\text{ZF})$."

VS: " $\forall x \exists y (x \in y \vee y \in x)$, ez a formula ZF-ben levezethető? "

Erre a kérdésre 24 másodpercig gondolkozott, és arrafelé ment először a gondolatmenete, hogy nem levezethető (ezt kijelzi a 2025-ös "reasoning" verzió), de aztán mégis a helyes irányba kezdett keresgélgni, az igen ágra. meg is találta a levezetést (bár átváltott magyarra):

AI: "Rövid válasz: Igen.
Indoklás (magyarul): ZF-ben van párosítási axióma:

$\forall a \forall b \exists z \forall u (u \in z \Leftrightarrow (u=a \vee u=b))$.

Ha ebben $b=a$ -t választjuk, akkor létezik az $\{a\}$ singleton, azaz

$\forall a \exists z (a \in z)$.

Ebből nyilvánvalóan következik $\forall x \exists y (x \in y \vee y \in x)$, mivel minden x -hez vehetjük $y=\{x\}$, és akkor $x \in y$ teljesül.

Nem kell hozzá a ZF többi erős axiómája (például a fundamentáltság vagy az axióma A.C.)."

Hát ez bizony jeles.

3. Szintaktikai képességek

Ezek már 2023-ban is megvoltak. Szintaktikailag helyesen eleméz.

VS: " $\forall x \forall y \forall z (\forall w (w \in z \wedge \exists u (u \in x \rightarrow w \in u)) \rightarrow z \in y)$, is it a formula in the language of ZF axiom system? "

AI: "Yes, the formula

$\forall x \forall y \forall z (\forall w (w \in z \wedge \exists u (u \in x \rightarrow w \in u)) \rightarrow z \in y)$

is a formula in the language of the Zermelo-Fraenkel set theory (ZF) axiom system. "

VS: " $\forall x \wedge y \forall z (\in w (w \in z \wedge \exists u (u \in x \rightarrow w \in u)) \rightarrow z \in y)$, is it a formula in the language of Z axiom system? "

AI: "The formula you provided, $\forall x \wedge y \forall z (\in w (w \in z \wedge \exists u (u \in x \rightarrow w \in u)) \rightarrow z \in y)$ has a couple of issues with parentheses. "

2025-ös tapasztalatunk -- a szintaktikai képességek nem romlottak el. Ezúttal magyarul kérdeztem, de ez nem változtat semmin.

AI2025: "Nem ez így egy jól-alkotott (well-formed) formulája a ZF nyelvének — szintaktikailag hibás: kvantorok és logikai jelek sorrendje, hiányzó kvantifikálások (például a w és u változók nincsenek előzetesen helyesen megkötvé), valamint az $\wedge$ használata a kvantorok mellett nem normális. "

4. Következtetési képességek

A logikai kurzusaink végső eredménye a következtetési képességek felépülése, mind formális nyelven, mind természetes nyelven. Most ezt fogjuk megvizsgálni és "leosztályozni", előbb 2023-as generatív MI válaszokkal, majd 2025-ösökkel.

2023-ban egy halmazelméleti, a matematika alapjait érintő következtetés:

VS: In ZF axiomatic system, let N be a set variable and let us assume that N satisfies the axiom of infinity. What do you think -- is it valid in ZF: $\forall x (x \in N \rightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in N))$? If yes, how to prove it in ZF?

AI: "Yes, the statement $\forall x (x \in N \rightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in N))$ is valid in ZF given that N satisfies the axiom of infinity.

To prove this statement, we can reason as follows:

Assume $x \in N$: Let x be an arbitrary element of N .

Assume $y \in x$: Let y be an arbitrary element of x .

Use the Axiom of Infinity: Since N satisfies the axiom of infinity, both x and y are sets in N . By the axiom of infinity, $x \cup \{x\}$ and $y \cup \{y\}$ are also in N .

Use Subset Property: Since $y \in x$, we have $y \cup \{y\} \subseteq x \cup \{x\}$. By the subset property of sets, $y \cup \{y\} \in N$.
 Conclusion: Since $y \cup \{y\}$ is in N , and y is an arbitrary element of x , the statement $\forall y (y \in x \rightarrow y \in N)$ holds.
 Since x was an arbitrary element of N , the original statement $\forall x (x \in N \rightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in N))$ holds true, and it is valid in ZF when N satisfies the axiom of infinity."

Mint egy eminensnek tűnni akaró diák, ha nem figyel oda az ember, még el is hisz neki. Úgy néz ki, mintha bizonyítás lenne. De következménynek hallucinálta a célformulát magát (lásd az aláhúzott részt), s abból persze könnyen levezette a célformulát.

Ugyanaz a lekérdezés 2025-ben. A válasz helyes.

AI: "Why the universal statement fails for an arbitrary NNN
 The usual form of the Infinity axiom in ZF is
 $\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall x \in I (x \cup \{x\} \in I))$.
 This guarantees the existence of *some* inductive set I . But there are many inductive sets, and nothing in that axiom forces an arbitrary inductive set N to be *transitive* (i.e. to satisfy $x \in N \wedge y \in x \Rightarrow y \in N$). So the formula
 $\forall x (x \in N \rightarrow \forall y (y \in x \rightarrow y \in N))$
 is not provable from ZF + "N is inductive" alone. Intuitively: being closed under successor $x \mapsto x \cup \{x\}$ does not force closure under *all* elements of members.
 (One can make this concrete: the Infinity axiom gives some inductive set I ; from I you can produce other inductive sets by various set-theoretic constructions so that elements of those sets need not have their members inside the set. Thus there are models of ZF containing non-transitive inductive sets.)"

A végén talán annyi pontatlanság, hogy "there are models of ZF ...", hozzá kell tenni, amennyiben volna modellünk a ZF-re, akkor ilyen modelleink is lennének.

Most egy tisztán formális következtetési feladat 2023-ból:

VS: "Ok, I ask you, that $\forall x R(x,x) \rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$ is a tautology in the signature L_0 ? "

AI: "No, the implication $\forall x R(x,x) \rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$ is not a tautology in the signature L_0 . To be a tautology, the implication must be true for all interpretations of the signature L_0 .
 In this case, the implication asserts that if every element relates to itself ($R(x,x)$ holds for all x), then for every element x , there exists an element y such that $R(x,y)$. This statement is not necessarily true in all interpretations of L_0 because there might be cases where $R(x,x)$ holds for all x without implying the existence of a related element y for every x .
 Therefore, the given implication is not a tautology in the signature L_0 ."

Ez nem jött össze. Nem próbált legalább egy ellenpéldát adni, ha már azt nyilatkozta, hogy nem következmény. Az érvelés csak mellébeszélés. Pedig már akkor is majdnem tudott formális dedukciókat kreálni. Ha direkt arra kértem (még 2023-ban):

VS: "Can you construct a formal deduction for the formula
 $\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
 $\rightarrow \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$? "

AI: (most képként idézem be, mert így a levezetés szerkezetét is mutatja:)

1. $\forall x R(x, x)$ [Assumption]
2. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ [Assumption]
3. $R(a, a)$ [Universal Instantiation, using 1, where a is a constant]
4. $R(b, b)$ [Universal Instantiation, using 1, where b is a constant]
5. $R(c, c)$ [Universal Instantiation, using 1, where c is a constant]
6. $R(a, a) \wedge R(b, b)$ [Conjunction Introduction, combining 3 and 4]
7. $R(a, a) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, b)$ [Universal Instantiation, using 2, with $x = a, y = a$, and $z = b$]
8. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 6 and 7]
9. $R(a, b) \wedge R(b, b)$ [Conjunction Introduction, combining 8 and 4]
10. $R(a, b) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, b)$ [Implication Introduction, trivial]
11. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 9 and 10]
12. $R(a, b) \wedge R(b, b)$ [Conjunction Introduction, combining 11 and 4]
13. $R(a, b) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, b)$ [Implication Introduction, trivial]
14. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 12 and 13]
15. $R(a, b) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, a)$ [Universal Instantiation, using 2, with $x = a, y = b$, and $z = a$]
16. $R(a, a)$ [Modus Ponens, using 6 and 15]
17. $R(a, a) \wedge R(b, b)$ [Conjunction Introduction, combining 16 and 4]
18. $R(a, a) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, b)$ [Universal Instantiation, using 2, with $x = a, y = a$, and $z = b$]
19. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 17 and 18]
20. $R(a, b) \rightarrow R(b, a)$ [Universal Instantiation, using 2, with $x = a, y = b$, and $z = a$]
21. $R(b, a)$ [Modus Ponens, using 19 and 20]
22. $\forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x))$ [Universal Introduction, using 21]
23. $\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x))$ [Implication Introduction, combining 1 and 22]
This completes the formal deduction for the given formula.

1. ábra: hibás formális levezetés 2023-ban

Forrás: saját készítés, az irodalomban megadott chatGPT-társalgásban

Aprócska hiba van csak benne, amit szinte csak egy bizonyítás-ellenőrző algoritmus tudna felfedezni. Viszont, nyilván a bizonyítás érvényességét egy apró hiba is lerombolja.

In step 7, the instantiation was erroneous. If $x=a, z=a$ and $z=b$, then the result of universal instantiation is $R(a,a) \wedge R(a,b) \rightarrow R(a,b)$.

You are absolutely correct; I made a mistake in step 7 of the deduction. Here's the corrected version of the deduction:

1. $\forall x R(x, x)$ [Assumption]
2. $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$ [Assumption]
3. $R(a, a)$ [Universal Instantiation, using 1, where a is a constant]
4. $R(a, a) \rightarrow R(a, a)$ [Implication Introduction, trivial]
5. $\forall y \forall z (R(a, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(a, z))$ [Universal Instantiation, using 2, with $x = a$]
6. $\forall z (R(a, a) \wedge R(a, z) \rightarrow R(a, z))$ [Universal Instantiation, using 5, with $y = a$]
7. $R(a, a) \wedge R(a, a) \rightarrow R(a, a)$ [Conjunction Introduction, combining 3 and 3]
8. $R(a, a) \wedge R(a, a) \rightarrow R(a, a)$ [Implication Introduction, trivial]
9. $R(a, a)$ [Modus Ponens, using 7 and 8]
10. $R(a, a) \wedge R(a, b)$ [Conjunction Introduction, combining 9 and 3]
11. $R(a, a) \wedge R(a, b) \rightarrow R(a, b)$ [Implication Introduction, trivial]
12. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 10 and 11]
13. $R(a, b) \wedge R(b, b)$ [Conjunction Introduction, combining 12 and 3]
14. $R(a, b) \wedge R(b, b) \rightarrow R(a, b)$ [Implication Introduction, trivial]
15. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 13 and 14]
16. $R(a, b) \wedge R(b, a)$ [Conjunction Introduction, combining 15 and 3]
17. $R(a, b) \wedge R(b, a) \rightarrow R(a, b)$ [Implication Introduction, trivial]
18. $R(a, b)$ [Modus Ponens, using 16 and 17]
19. $\forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x))$ [Universal Introduction, using 18]
20. $\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x))$ [Implication Introduction, combining 1 and 19]
I hope this corrected version addresses the issue you pointed out. If you have any more questions or if there's anything else I can assist you with, please feel free to let me know.

2. ábra: korrigált formális levezetés 2023-ban

Forrás: saját készítés, az irodalomban megadott chatGPT-társalgásban

A formális következtetés szabályai már megvoltak 2023-ban is, de még a mintaillesztő algoritmus, az automatikus tételbizonyítás körében unifikációs algoritmus, nem volt tökéletesen beépülve a neuronhálójába. A 2025-ös verzió már ilyen hibát sem csinál, a természetes levezetés szabályait nem csak megtanulta, hanem pontosan alkalmazza is.

Formal deduction (natural deduction) 1. $(\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, z)))$ — Assumption (assume antecedent to prove implication) 2. $\forall x R(x, x)$ — from (1) by $\wedge$-elimination. 3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, z))$ — from (1) by $\wedge$-elimination. 4. Introduce two fresh arbitrary constants a, b. We will show $R(a, b) \rightarrow R(b, a)$ (these constants must not occur in any undischarged assumption that mentions them; they are fresh and thus arbitrary). 5. $R(b, b)$ — from (2) by $\forall$-elimination (instantiate $\forall x R(x, x)$ at $x := b$). 6. $(R(b, b) \wedge R(a, b)) \rightarrow R(b, a)$ — from (3) by $\forall$-elimination with $x := b, y := b, z := a$. (We get the instance $(R(b, b) \wedge R(a, b)) \rightarrow R(b, a)$.) 7. Assume $R(a, b)$. — Temporary assumption for $\rightarrow$-introduction. 8. $R(b, b) \wedge R(a, b)$ — from (5) and (7) by $\wedge$-introduction. 9. $R(b, a)$ — from (6) and (8) by $\rightarrow$-elimination (Modus Ponens). 10. Discharge assumption (7): $R(a, b) \rightarrow R(b, a)$. — from (7)–(9) by $\rightarrow$-introduction. 11. Because a, b were arbitrary (fresh), we may generalize first on b: $\forall y (R(a, y) \rightarrow R(y, a))$. — from (10) by $\forall$-introduction on b. (Side-condition: b does not occur in any undischarged assumption aside from the initial assumption (1), which does not mention b.) 12. Then generalize on a: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$. — from (11) by $\forall$-introduction on a. (Side-condition: same remarks.) 13. Discharge assumption (1): $(\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, z))) \rightarrow \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$. — from (1) and (12) by $\rightarrow$-introduction. This is exactly the formula Φ we set out to prove.

3. ábra: 2025-ös formális levezetés

Forrás: saját készítés, az irodalomban megadott chatGPT-társalgásban

Ez a levezetés teljesen rendben van. A formális levezetési képességet jelesre értékelhetjük 2025-ben.

5. Természetes nyelvi következtetések

Ezt a részt csak 2025-ben teszteltük. A természetes nyelvű állítások formalizálását szinte tesztelni sem érdemes, ugyanis tudjuk, hogy a generatív MI erőssége a nyelvi minták felismerése és transzformálása-átalakítása. Ha természetes nyelvi következmény vizsgálatát kérjük, akkor formalizálja a problémát, és az előző fejezetben már demonstrált képességével megint szépen megoldja.

VS: "A biologically flavored logic mystery

A team of field ecologists is studying nutrient flows and toxic interactions in an old-growth forest. They discover a curious chain of relationships among *organisms* living in the shaded understory.

Your task is to determine whether TheDeer becomes endangered under the conditions described.

Known ecological principles

Any herbivore that transfers nutrients from a toxic plant to an organism that is poisonous to it becomes endangered.

Biologists express this as:

If an herbivore (H) transfers nutrients of a toxic plant (T) to some organism (O) that is poisonous to it, then H becomes endangered.

Every rare tuber is a toxic plant.

Every rare tuber that is buried in the soil of TheFungus has its nutrients transferred to TheFungus by TheDeer.

There exists at least one rare tuber buried in TheFungus's soil.

Any organism that competes with TheForest is poisonous to herbivores.

TheDeer is a herbivore.

TheFungus competes with TheForest.

The Question

Given all the principles and facts above: Must TheDeer be classified as endangered? Explain your reasoning."

Ez a feladat az [RN2022] tankönyvben szereplő (Example 8.5.3), West ezredes--Nono ország--rakétaeladás témakörben mozgó következtetési példa átdolgozása, amit természetesen a ChatGPT-vel fogalmaztattam át más témakörben dolgozó példává, de nem ugyanazon kliens kapcsolaton, mint amin a következményvizsgálatot kértem, nehogy az a vád érje, hogy "leselkedett".

Először formalizálással kezdett.

AI: "(Variables range over organisms; constants: TheDeer, TheFungus, TheForest.)

Any herbivore that transfers nutrients from a toxic plant to an organism that is poisonous to it becomes endangered.

$\forall H \forall P \forall O$ (Herbivore(H) $\wedge$ ToxicPlant(P) $\wedge$ Transfers(H,P,O) $\wedge$ PoisonousTo(O,H) $\rightarrow$ Endangered(H)).

Every rare tuber is a toxic plant.

$\forall x$ (RareTuber(x) $\rightarrow$ ToxicPlant(x)).

Every rare tuber buried in the soil of TheFungus has its nutrients transferred to TheFungus by TheDeer.

$\forall x$ (RareTuber(x) $\wedge$ BuriedInSoilOf(x, TheFungus) $\rightarrow$ Transfers(TheDeer, x, TheFungus))

There exists at least one rare tuber buried in TheFungus's soil.

$\exists x$ (RareTuber(x) $\wedge$ BuriedInSoilOf(x, TheFungus))

Any organism that competes with TheForest is poisonous to herbivores.

(Make explicit dependence on the herbivore argument)

$\forall O \forall H$ (CompetesWith(O, TheForest) $\wedge$ Herbivore(H) $\rightarrow$ PoisonousTo(O, H)).

TheDeer is a herbivore.

Herbivore(TheDeer).

TheFungus competes with TheForest.

CompetesWith(TheFungus, TheForest).

Goal: Endangered(TheDeer)"

A formalizálás rendben van. Utána levezetést keres, természetes levezetési stílusban, éppen, ahogy az egyetemünkön is tanítottuk. Képként idézem, egyébként elvész némi olvashatóság:

AI:

Derivation (informal natural-deduction style)

1. From (4) $\exists x (\text{RareTuber}(x) \wedge \text{BuriedInSoilOf}(x, \text{TheFungus}))$, instantiate the existential to get a witness a so that
 $\text{RareTuber}(a) \wedge \text{BuriedInSoilOf}(a, \text{TheFungus})$.
 (Existential instantiation.)
2. From (2) $\forall x (\text{RareTuber}(x) \rightarrow \text{ToxicPlant}(x))$, instantiate with a to get $\text{ToxicPlant}(a)$.
 (Universal instantiation + modus ponens on $\text{RareTuber}(a)$.)
3. From (3) $\forall x (\text{RareTuber}(x) \wedge \text{BuriedInSoilOf}(x, \text{TheFungus}) \rightarrow \text{Transfers}(\text{TheDeer}, x, \text{TheFungus}))$, instantiate with a and use the fact $\text{RareTuber}(a) \wedge \text{BuriedInSoilOf}(a, \text{TheFungus})$ to conclude
 $\text{Transfers}(\text{TheDeer}, a, \text{TheFungus})$.
 (Universal instantiation + modus ponens.)
4. From (7) $\text{CompetesWith}(\text{TheFungus}, \text{TheForest})$ and (6) $\text{Herbivore}(\text{TheDeer})$, using (5) $\forall O \forall H (\text{CompetesWith}(O, \text{TheForest}) \wedge \text{Herbivore}(H) \rightarrow \text{PoisonousTo}(O, H))$ we instantiate with $O = \text{TheFungus}, H = \text{TheDeer}$ to get
 $\text{PoisonousTo}(\text{TheFungus}, \text{TheDeer})$.
 (Universal instantiation + modus ponens.)
5. Now we have the four antecedents required to apply (1) with $H = \text{TheDeer}, P = a, O = \text{TheFungus}$:
 - $\text{Herbivore}(\text{TheDeer})$ (premise 6),
 - $\text{ToxicPlant}(a)$ (step 2),
 - $\text{Transfers}(\text{TheDeer}, a, \text{TheFungus})$ (step 3),
 - $\text{PoisonousTo}(\text{TheFungus}, \text{TheDeer})$ (step 4).
 From (1) instantiated with these terms we get $\text{Endangered}(\text{TheDeer})$.
 (Universal instantiation + modus ponens.)

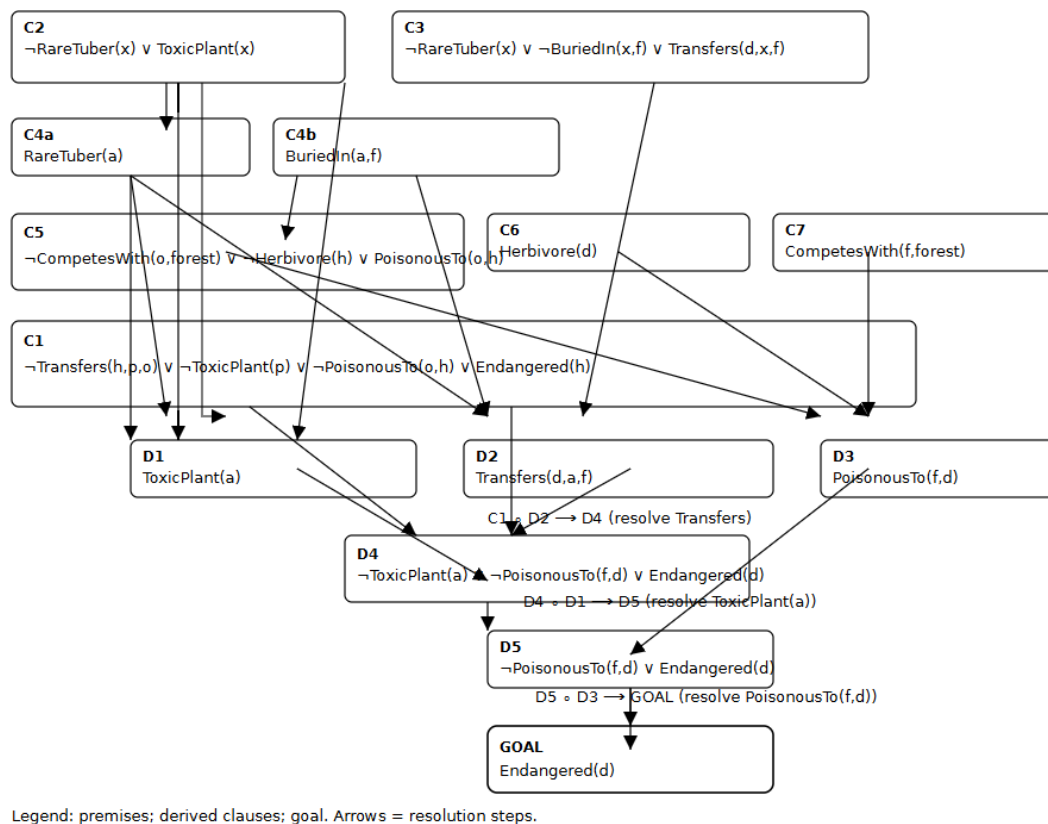
Thus $\text{Endangered}(\text{TheDeer})$ is derivable from the premises, so the answer is **yes**: TheDeer must be classified as endangered.

4.

4. ábra természetes nyelvi feladat levezetése

Forrás: saját készítés, az irodalomban megadott chatGPT-társalgásban

Mint ráadás, mellékelem a létrejött bizonyítás rezolúciós átalakításának egy grafikus vázlatát, amit persze a chatGPT generált a derivációból SVG-formátumba.



5. ábra: természetes nyelvi következtetés rezolúciós váza

Forrás: saját készítés, az irodalomban megadott chatGPT-társalgásban

A kesze-kusza élek miatt nem könnyen, de látható, hogy ennek a levezetésnek a megtalálásához legalább 5 mélységű keresést kellett végrehajtani. Ennél nagyobb mélységű bizonyítást, magasabb szinten megfogalmazva, ennél sokkal komplexebb természetes nyelvi bizonyítást egyetemi logika kurzuson sem illik feladni. Kimondható, hogy a 2025-ös ChatGPT-5 jelesre vizsgázott.

6. Szerény tanulság

A szerénységet úgy értjük, miszerint valószínűleg ennél merészebb következtetéseket is levonhatnánk.

A generatív MI (ezen példány) jelesre vizsgázott egyetemi szintű matematika alapjai -- informatika logikai alapjai jellegű tárgyból. A formális következtetések és informális, természetes nyelvi (de logikai jellegű) következtetések legalább olyan mélységű vizsgálatára képes, mint egy egyetemi hallgatótól elvárt.

Azt a tanulságot viszont nem lehet levonni, hogy akkor most már ne tanítsunk logikai következtetéseket a hallgatóknak. Csakúgy, mint a sakban. Attól, hogy a gépek jobban sakkoznak, mint az ember, még van értelme a fiataloknak a sakkozni tanulásba időt, erőfeszítést tenni, mert az olyan készségeket fejleszt, amikre majd máshol is szükség lehet.

A formális következtetések vizsgálata után az ellenpélda-modellek keresésének vizsgálata, amikor egy következmény fenn-nem-állásának igazolását akarjuk belátni, az egy következő tanulmányra marad.

Úgyszintén egy következő tanulmány célja lehet, hogy megállapítsuk, milyen mélységű érvelést tud készíteni a generatív MI aktuális verziója.

Hivatkozott webodalak

- [VS2023] ZFC for Everyday Math, web history of the conversation with chatGPT-3.5, Vályi Sándor, <https://chatgpt.com/share/692cc27a-f8f8-8011-a3b9-bb55675ef3c3> Készítve: 2023. májusában
- [VS2025] ZF and PA consistency, web history of the conversation with chatGPT-5, Vályi Sándor, <https://chatgpt.com/share/692cc30d-0eb8-8011-8862-1a9b76ef8c58> Készítve: 2025. novemberében
- [ZEFF2025] Maxwell Zeff: OpenAI launches a pair of AI reasoning models, o3 and o4-mini, web article, <https://techcrunch.com/2025/04/16/openai-launches-a-pair-of-ai-reasoning-models-o3-and-o4-mini>, April 16, 2025. megtekintve: 2025.11.01

Hivatkozott preprintek

- [LIU2023] Liu, H., Ning, R., Teng, Z., Liu, J., Zhou, Q., & Zhang, Y.: Evaluating the logical reasoning ability of chatgpt and gpt-4. arXiv preprint arXiv:2304.03439. (2023)

Hivatkozott könyvek

- [RN2022] Russell, S., Norvig, P.: Artificial intelligence a Modern Approach, 4th ed, Pearson, (2022), ISBN 978-1-292-40113-3

Felhasznált szakirodalom

- [PATEL2024] Patel, N., Kulkarni, M., Parmar, M., Budhiraja, A., Nakamura, M., Varshney, N., & Baral, C.: Multi-logieval: Towards evaluating multi-step logical reasoning ability of large language models. arXiv preprint arXiv:2406.17169. (2024) <https://doi.org/10.18653/v1/2024.emnlp-main.1160>
- [WAN2024] Wan, Y., Wang, W., Yang, Y., Yuan, Y., Huang, J. T., He, P., ... & Lyu, M.: LogicAsker: Evaluating and improving the logical reasoning ability of large language models. In: Proceedings of the 2024 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (pp. 2124-2155). (2024 November) <https://doi.org/10.18653/v1/2024.emnlp-main.128>

SZERZŐI ADATOK

Dr. Vályi Sándor PhD
Egyetemi docens
Nyíregyházi Egyetem
Matematika és Informatika Intézet
valyi.sandor@nye.hu