

SPECIÁLIS DE LA VALLÉE POUSSIN-FÉLE VILENKIN-FOURIER-KÖZEPEK MAJDNEM MINDENÜTTI KONVERGENCIÁJA

BLAHOTA ISTVÁN ÉS NAGY DÓRA

ÖSSZEFOGLALÓ

Korlátos Vilenkin–Fourier-rendszereken vizsgálunk egy de la Vallée Poussin-típusú mátrix-transzformációs összegzési eljárást. Megadjuk azokat a monotonitási és egyéb feltételeket a súlyokra, amelyek biztosítják, hogy az így kapott közepek majdnem mindenütt tartsanak az eredeti függvényhez minden integrálható függvény esetén.

ABSTRACT

We investigate a de la Vallée Poussin-type matrix transformation summation procedure on bounded Vilenkin–Fourier systems. We give the monotonicity and other conditions on the weights that ensure that the resulting means converge to the original function almost everywhere, for every integrable function.

1. Jelölések és definíciók

Bevezetjük a Vilenkin-analízissel kapcsolatos jelöléseket, fogalmakat. Röviden bemutatjuk a Vilenkin–Fourier-analízis elméletét (további részletekért lásd [1, 22]-t). Legyen $\mathbb{P}$ a pozitív egész számok halmaza és $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egész számok sorozata. Jelölje $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ a természetes számok additív csoportját moduló m_n , ahol $n \in \mathbb{N}$. Ezen $\mathbb{Z}_{m_n}$ diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzataként definiáljuk a G_m Vilenkin-csoportot. A G_m -en értelmezett csoportművelet legyen a koordinátánkénti összeadás moduló m_n .

A G_m -en bevezetett μ mértéket a

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \quad (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

mértékek direkt szorzataként definiáljuk, ami Haar-mérték és valószínűségi mérték, azaz $\mu(G_m) = 1$.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G_m -et korlátos, egyébként nem korlátos Vilenkin-csoportnak nevezzük. Jelen cikkben csak a korlátos esettel foglalkozunk. Az $m = (2, 2, \dots)$ esetén G -t, a diadikus csoportot kapjuk. G_m elemei az

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \quad (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

számsorozatokkal reprezentálhatóak. Az m -adikus intervallumok definiálása a következő módon történik. Legyen

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\},$$

ahol $x \in G_m$ és $n \in \mathbb{P}$.

Az m sorozaton alapuló ún. általánosított, m -adikus számrendszert az alábbi módon definiáljuk

$$M_0 := 1, \quad M_{n+1} := m_n M_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen előállítható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ alakban, ahol $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) és csak véges sok n_k különbözik nullától. Jelölje $|n|$ azt a természetes számot (n rendje), amelyre $n \in \mathbb{P}$ és $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Bevezetünk G_m -en egy ortonormált rendszert, amelyet Vilenkin-rendszernek nevezünk. Ehhez definiáljuk az $r_k(x) : G_m \rightarrow \mathbb{C}$, komplex értékű függvényeket, azaz az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényeket úgy, hogy

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \quad (i^2 = -1, \quad x \in G_m, \quad k \in \mathbb{N}).$$

A G_m -en értelmezett $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot, ahol

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

Vilenkin-rendszernek nevezzük.

Amennyiben $m = (2, 2, \dots)$, úgy speciálisan a Walsh–Paley-rendszert kapjuk. Ismert, hogy a Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L_2(G_m)$ -ben (lásd pl. [24]). A Vilenkin-rendszer elemei pontosan azok az $f : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvények, melyekre

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

és $|f(x)| = 1$ minden $x, y \in G_m$ esetén. Sőt, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = \psi_n(x)$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén (lásd [22]-ot).

A továbbiakban bevezetjük a Vilenkin–Fourier-analízis alapvető fogalmait. Definiáljuk az f függvény n -edik Vilenkin–Fourier-együtthatóját, Vilenkin–Fourier-sorának n -edik részletösszegét, az n -dik Vilenkin–Fejér-közeget:

$$\begin{aligned} \hat{f}(j) &:= \int_{G_m} f \bar{\psi}_j d\mu, \quad \text{ha } j \in \mathbb{N}, \\ S_n(f) &:= \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(j) \psi_j, \quad \sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(f), \end{aligned}$$

ahol $n \in \mathbb{P}$.

Legyen $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ egy végtelen számmátrix. Mindig feltételezzük, hogy a T -mátrix felső háromszög alakú, azaz $t_{i,j} := 0$, ha $i > j$. Legyen a T -mátrix által meghatározott n -edik mátrix transzformációs közép

$$\sigma_n^T(f; x) := \sum_{k=1}^n t_{k,n} S_k(f; x).$$

Mivel a T -mátrix n -edik oszlopa határozza meg a σ_n^T mátrix transzformációs közeget és definíciója csak véges számú tagot tartalmaz, ezért az egyszerűség kedvéért az n -edik oszlopot $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, \quad k \in \mathbb{P})$ véges számsorozatnak tekintjük.

Használni fogjuk még a következő jelölést. Legyen

$$\Delta t_{k,n} := t_{k,n} - t_{k+1,n},$$

ahol $k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{P}$ és $t_{n+1,n} := 0$.

A továbbiakban legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n, k \in \mathbb{P})$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén.

Definiáljuk az $(\tilde{n}, n)$ -edik de la Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepet a következő módon

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f; x) := \sum_{k=\tilde{n}}^n t_{k,n} S_k(f; x),$$

ahol $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ és $\tilde{n} \leq n$.

2. Történeti áttekintés

A mátrix transzformációs közepek számos jól ismert összegzési módszer általánosításai. Egyszerű megfontolásból következik, hogy a Riesz-, a Nörlund-, a T (súlyozott), a Fejér- (vagy a $(C, 1)$), a Cesàro- (C, α) és a változó paraméterekkel rendelkező Cesàro- (C, α_n) közepek mind a bemutatott mátrix transzformációs összegzési módszer speciális esetei. A trigonometrikus rendszerre vonatkozó mátrix transzformációs közepekre lásd pl. Chandra [13] és Leindler [18] eredményeit, valamint Natanson és Zuk könyvét [21]. Vilenkin-rendszerekre lásd Blyumin [12] cikkét. Blyumin [12] cikke Vilenkin esetben becslést ad a mátrix transzformációs közepekkel való approximációra a legjobb közelítések és néhány, a Lebesgue állandókhöz hasonló integrálok tekintetében. Az utóbbi években számos tanulmány jelent meg a mátrix transzformációs közepekkel kapcsolatban, amelyek Móricz és Siddiqi [20] Walsh–Nörlund összegzési módszerrel végzett munkáján, valamint Móricz és Rhoades [19] súlyozott közepek módszerével végzett eredményén alapulnak. Móricz és Siddiqi [20], valamint Móricz és Rhoades [19] e két eredményének közös általánosítását K. Nagy és az I. Blahota [7] adta meg. A Walsh–Paley rendszerrel kapcsolatos további eredményekért lásd [10, 11, 16], a korlátos Vilenkin rendszerekkel kapcsolatos eredményekért [8, 9]. Hasonló állítások a Walsh–Fourier sorok negatív rendű Cesàro közepekre vonatkozóan a [15, 23] cikkekben találhatóak.

Ezen módszerek Walsh–Fourier sorokkal kapcsolatos egyéb aspektusait a [14, 26] cikkekben tárgyalják. Avdispahić és Pepić a [2] cikkükben a Vilenkin-rendszerre is bizonyítottak eredményeket.

Megemlítjük, hogy Iofina és Volosivets [17] hasonló eredményeket értek el Vilenkin-rendszereken, hasonló feltételekkel, különböző módszerekkel (függetlenül Móricz, Rhoades, Siddiqi, Fridli, Goginava, Gát, Tephnadze, Nagy K., illetve mások módszerétől). A de la Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepeket a Walsh-rendszerhez Blahota és Gát vezették be a [5]-ben.

Nemrégiben Blahota [4], Volosivets [25], valamint Blahota és Nagy D. [6] publikáltak a jelen cikkben bemutatott eredményhez hasonlókat, melyek szintén a de la Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepekkel foglalkoznak.

A jelen cikkben szereplő 1. Tétel a Blahota és Nagy D. [6] cikkében szereplő 6.5. Tétel általánosítása.

3. Majdnem mindenütti konvergencia

1. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Rögzítsünk egy $i \in \mathbb{P}$ -t. Minden $n \in \mathbb{P}$ -re legyen $(t_{k, M_{n+i}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+i} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$(1) \quad \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k, M_{n+i}-1} = 1.$$

Ha a $(t_{k, M_{n+i}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+i} - 1)$ sorozat minden rögzített n esetén növekvő vagy csökkenő (különböző n -ekre nem feltétlenül ugyanabban az értelemben), továbbá feltesszük, hogy

$$(2) \quad t_{M_n, M_{n+i}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

és

$$(3) \quad t_{M_{n+i}-1, M_{n+i}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

akkor

$$\sigma_{M_n, M_{n+i}-1}^T(f) \rightarrow f$$

majdnem mindenütt, amennyiben $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A bizonyításban szereplő c konstansok csak i -től és $\sup_{n \in \mathbb{N}} m_n$ -től függnak, illetve a (2) és az (3) feltételektől.

Az Abel-transzformációt használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k, M_{n+i}-1} S_k(f) \\ &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-2} \Delta t_{k, M_{n+i}-1} k \sigma_k(f) \\ & \quad + t_{M_{n+i}-1, M_{n+i}-1} (M_{n+i} - 1) \sigma_{M_{n+i}-1}(f) \\ & \quad - t_{M_n, M_{n+i}-1} (M_n - 1) \sigma_{M_n-1}(f). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} & \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-2} \Delta t_{k, M_{n+i}-1} k \\ &= \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k, M_{n+i}-1} - (M_{n+i} - 1) t_{M_{n+i}-1, M_{n+i}-1} \\ & \quad + (M_n - 1) t_{M_n, M_{n+i}-1}, \end{aligned}$$

növekvő esetben, a (3) feltétel használatával adódik, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-2} |\Delta t_{k, M_{n+i}-1}| k$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k,M_{n+i}-1} + (M_{n+i} - 1)t_{M_{n+i}-1,M_{n+i}-1} \\
&\quad - (M_n - 1)t_{M_n,M_{n+i}-1} \\
&\leq (M_{n+i} - 1)t_{M_{n+i}-1,M_{n+i}-1} \leq c,
\end{aligned}$$

míg csökkenő esetben az (1) és a (2) feltételekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-2} |\Delta t_{k,M_{n+i}-1}|k \\
&= \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k,M_{n+i}-1} - (M_{n+i} - 1)t_{M_{n+i}-1,M_{n+i}-1} \\
&\quad + (M_n - 1)t_{M_n,M_{n+i}-1} \\
&\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k,M_{n+i}-1} + (M_n - 1)t_{M_n,M_{n+i}-1} \\
&= 1 + (M_n - 1)t_{M_n,M_{n+i}-1} \leq c.
\end{aligned}$$

Innen a (2) és a (3) feltételek segítségével

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k,M_{n+i}-1} S_k(f) \right| \\
&\leq \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-2} |\Delta t_{k,M_{n+i}-1}|k \sup_{k \in \{M_n, \dots, M_{n+i}-2\}} |\sigma_k(f)| \\
&\quad + (M_{n+i} - 1)t_{M_{n+i}-1,M_{n+i}-1} |\sigma_{M_{n+i}-1}(f)| \\
&\quad + (M_n - 1)t_{M_n,M_{n+i}-1} |\sigma_{M_n-1}(f)| \\
&\leq c \sup_{k \in \{M_n, \dots, M_{n+i}-2\}} |\sigma_k(f)| \\
&\quad + c |\sigma_{M_{n+i}-1}(f)| + c |\sigma_{M_n-1}(f)| \\
&\leq c \sup_{k \in \mathbb{P}} |\sigma_k(f)| = c\sigma^*(f),
\end{aligned}$$

ahol $\sigma^*(f) = \sup_{k \in \mathbb{P}} |\sigma_k(f)|$.

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$(4) \quad \sup_{n \in \mathbb{P}} \left| \sum_{k=M_n}^{M_{n+i}-1} t_{k,M_{n+i}-1} S_k(f) \right| \leq c\sigma^*(f).$$

Ismert, hogy az $f \mapsto \sigma^*(f)$ operátor gyengén $(1, 1)$ típusú. A (4) egyenlőtlenségből következik, hogy az

$$f \mapsto \sup_{n \in \mathbb{P}} \left| \sigma_{M_n, M_{n+i}-1}^T(f) \right|$$

operátor szintén gyengén $(1, 1)$ típusú. Mivel a Vilenkin-polinomok sűrűek $L_1(G_m)$ -ben, és ilyen polinomokra $\sigma_{M_n, M_{n+i}-1}^T(f) = f$ minden elég nagy n esetén, ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{M_n, M_{n+i}-1}^T(f) = f,$$

majdnem mindenütt. □

Hivatkozások

- [1] G.H. Agaev, N.Ya. Vilenkin, G.M. Dzharfari and A.I. Rubinstein, *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups*, (in Russian), Izd. ("ELM"), Baku, 1981.
- [2] M. Avdispahić and M. Pepić, *Summability and integrability of Vilenkin series*, Collect. Math. 51 (3) (2000), 237–254.
- [3] D. Baramidze, Z. Dvalashvili and G. Tutberidze, *Convergence of Nörlund means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Mem. Differential Equations Math. Phys. 86 (2022), 1–14.
- [4] I. Blahota, *Approximation by de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin-Fourier series*, Ann. Math. Inform. (2025), DOI: 10.33039/ami.2025.06.002. <https://doi.org/10.33039/ami.2025.06.002>
- [5] I. Blahota and G. Gát, *On the rate of approximation by generalized de la Vallée Poussin type matrix transform means of Walsh-Fourier series*, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 14 (1) (2022), S59–S73. <https://doi.org/10.1134/S2070046622050053>
- [6] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin-Fourier series*, Anal. Math. 50 (3) (2024) 939–957. <https://doi.org/10.1007/s10476-024-00049-2>
- [7] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Θ -means of Walsh-Fourier series*, Anal. Math. 44 (1) (2018), 57–71. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0106-3>
- [8] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by matrix transform of Vilenkin-Fourier series*. Publ. Math. Debrecen 99 (1-2) (2021), 223–242. <https://doi.org/10.5486/PMD.2021.9001>
- [9] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Marcinkiewicz-type matrix transform of Vilenkin-Fourier series*, Mediterr. J. Math. 19 (165) (2022). <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02105-3>
- [10] I. Blahota, K. Nagy and M. Salim, *Approximation by Θ -means of Walsh-Fourier series in dyadic Hardy spaces and dyadic homogeneous Banach spaces*, Anal. Math. 47, (2021) 285–309. <https://doi.org/10.1007/s10476-021-0083-9>
- [11] I. Blahota, K. Nagy and G. Tepnadze, *Approximation by Marcinkiewicz Θ -means of double Walsh-Fourier series*, Math. Inequal. Appl. 22 (3) (2019), 837–853. <https://doi.org/10.7153/mia-2019-22-58>
- [12] S.L. Blyumin, *Linear summability methods for Fourier series in multiplicative systems*, Sibirsk. Mat. Zh. 9 (2) (1968), 449–455.
- [13] P. Chandra, *On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Math. Hungar. 52 (1988), 199–205. <https://doi.org/10.1007/BF01951564>
- [14] T. Eisner, *The Θ -summation on local fields*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 33 (2011), 137–160.
- [15] U. Goginava, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series*, J. Approx. Theory 115 (1) (2002), 9–20. <https://doi.org/10.1006/jath.2001.3632>
- [16] U. Goginava and K. Nagy, *Matrix summability of Walsh-Fourier series*, Mathematics 10 (14), 2458 (2022). <https://doi.org/10.3390/math10142458>
- [17] T.V. Iofina and S.S. Volosivets, *On the degree of approximation by means of Fourier-Vilenkin series in Hölder and L_p norm*, East J. Approx. 15 (2), (2009) 143–158.
- [18] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, Acta Math. Hungar. 104, (2004), 105–113. <https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000034365.58203.c7>
- [19] F. Móricz and B.E. Rhoades, *Approximation by weighted means of Walsh-Fourier series*, Int. J. Math. Sci. 19 (1) (1996), 1–8. <https://doi.org/10.1155/S0161171296000014>
- [20] F. Móricz and A. Siddiqi, *Approximation by Nörlund means of Walsh-Fourier series*, J. Approx. Theory. 70 (1992), 375–389. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(92\)90067-X](https://doi.org/10.1016/0021-9045(92)90067-X)

- [21] G.I. Natanson and V.V. Zuk, Trigonometric Fourier Series and Approximation Theory, Izdat. Leningrad Univ., Leningrad, 1983 (in Russian).
- [22] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon and J. Pál, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol-New York, 1990.
- [23] G. Shavardenidze and M. Totladze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series*. Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. 34 (2023), 1–8.
- [24] N.Ya. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, (in Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 11 (1957), 363–400.
- [25] S.S. Volosivets, *Approximation by Vallée-Poussin type means of Vilenkin-Fourier series*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 16 (3) (2024), 295–301. <https://doi.org/10.1134/S2070046624030075>
- [26] F. Weisz, *Θ -summability of Fourier series*, Acta Math. Hungar. 103 (1-2) (2004), 139–175. <https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000028241.87331.c5>

SZERZŐI ADATOK

Dr. habil. Blahota István PhD
 Főiskolai tanár
 Nyíregyházi Egyetem
 Matematika és Informatika Intézet
blahota.istvan@nye.hu

Dr. Nagy Dóra PhD
 Tanársegéd
 Nyíregyházi Egyetem
 Matematika és Informatika Intézet
nagy.dora@nye.hu